DEVOIR NUMÉRO 4 VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1

Partie I - Réduction et puissances d'une matrice 3×3.

Dans cette première partie, on considère les matrices $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \frac{1}{3}\mathrm{I}_3$.

1. Déterminer le rang de B. En déduire une valeur propre immédiate de B.

2. Écrire un programme Python d'en-tête def poly_mat(P,M) : qui prend en argument une liste P=$[a_0, a_1, ..., a_n]$ et une matrice carrée M et renvoie la matrice

$$a_0\mathrm{I} + a_1 M + \cdots + a_n M^n.$$

3. On suppose la fonction précédente écrite correctement. À l'aide des instructions ci-dessous et de leur résultat d'exécution présenté ci-après, déterminer un polynôme annulateur de B.

```python
import numpy as np

B = np.array([[0,1/3,1/3], [2/3,0,0], [2/3,0,0]])

P = [0,-4,0,9]

print(poly_mat(B,P))
```

```
>>>
[[0.,0.,0.],
[0.,0.,0.],
[0.,0.,0.]]
```

Déterminer une matrice diagonale D de première ligne nulle et une matrice inversible P de première ligne $(0 \quad 1 \quad -1)$ telles que $B = PDP^{-1}$.

4. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $B^j = PD^jP^{-1}$.

5. Expliciter la matrice P^{-1}.

6. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A^k = P\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}D^j\right)P^{-1}.$$

7. Expliciter, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la première ligne de A^k.

Date: 11 Janvier 2025 08h30-12h00.
http://louismerlin.fr.

Partie II - Une chaîne de Markov à trois états. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le k-ième tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le k-ième tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - Soit X_k a pris la valeur 1. Dans ce cas on procède au $(k+1)$-ième tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)$-ième tirage.
  - Soit X_k a pris une valeur j différente de 1. Dans ce cas, on procède aussi au $(k+1)$-ième tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

On admet que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov.

8. Reconnaître la loi de X_1.

9. Simulation informatique de l'expérience aléatoire.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule une réalisation des de X_k (l'entier k étant laissé au choix de l'utilisateur).

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(k) :
  x = .....
  for i in range(k-1) :
    tirage = rd.randint(1,4)
    if x == 1 :
      x = .....
    else :
      if tirage != x :
        x = .....
  return x
```

10. On ajoute les commandes suivantes. Expliquer précisément ce qu'elles font. On joint la figure obtenue après leur exécution. Que peut-on conjecturer ?

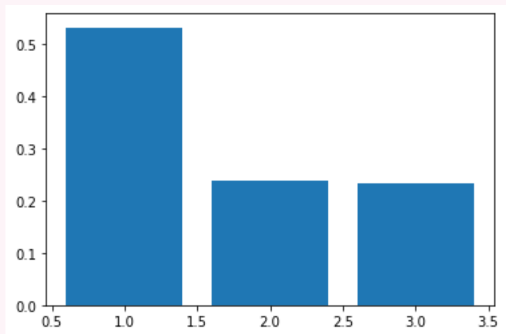
```python
import matplotlib.pyplot as plt

n = 50

freq_etats = np.zeros(3)

for k in range(1000) :
  freq_etats[simul_X(n)-1] += 1
freq_etats = freq_etats/1000
plt.bar([1,2,3],freq_etats)
plt.show()
```

Plot Python



11. On note U_k le vecteur-ligne à 3 colonnes défini par

$$U_k = \left(\mathbb{P}([X_k=1]) \quad \mathbb{P}([X_k=2]) \quad \mathbb{P}([X_k=3])\right),$$

c'est-à-dire le k-ième état probabiliste de la chaîne.

a. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, déterminer les probabilités

$$\mathbb{P}_{[X_k=i]}([X_{k+1}=j]).$$

En déduire que matrice de transition de la chaîne de Markov est la matrice A de la partie **I**.

b. Représenter le graphe probabiliste à trois sommets associé à la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

c. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que
$$U_{k+1} = U_k A.$$

d. Déterminer l'état stable de la chaîne de Markov. Quelle remarque peut-on faire vis-à-vis de la question **10** ?

e. On pose $U_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$. Montrer qu'on a $U_k = U_0 A^k$.

f. Montrer que la loi de X_k est donnée par
$$\mathbb{P}\left([X_k = 1]\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \qquad \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right) = \mathbb{P}\left([X_k = 3]\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

g. Justifier que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi. Expliquer en quoi ce résultat est compatible avec la question **11.d**.

h. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.

Exercice 2 **EDHEC** 2024 Exercice 1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx$ et on a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx$.

1. **a.** Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}.$$

b. En déduire que $u_0 = \frac{1}{4}\ln(3)$

2. Calculer u_1.

3. **a.** Pour tout entier naturel n, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

b. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de suite(n)

```
def suite(n) :
  if (-1)**n == 1 :
    u = np.log(3)/4
    for k in range(2,n+1,2) :
      u = 4*u - .....
  else :
    u = np.log(2/np.sqrt(3))
    for k in range(3,n+1,2) :
      u = 4*u - .....
  return u
```

4. **a.** Utiliser la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}.$$

b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

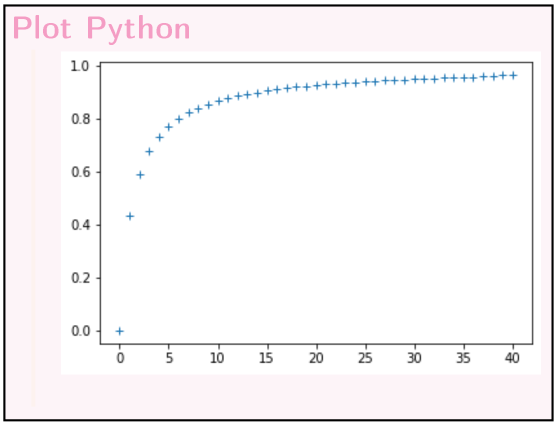
c. La série de terme général u_n est-elle convergente ? Pour quelle raison ?

5.

6. **a.** On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut, ainsi que le retour Python

```
x=np.arange(0,41)

u=[] # liste vide
for n in range(41):
  u.append(3*n*suite(n))
plt.plot(x,u,'+')
plt.show()
```



Laquelle de ces quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

❶ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ ❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ❸ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$ ❹ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

b. Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx.$$

c. Montrer par encadrement que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx = 0.$$

d. Vérifier la conjecture établie à la question **5.a**.

Exercice 3 **EML** 2022 Exercice 2.

On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la famille $= \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **trace** de M le réel noté $\mathrm{tr}(M)$ défini par

$$\mathrm{tr}(M) = a + d.$$

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \mathrm{tr}(M)J.$$

1. **a.** Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{tr} : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M)\end{array}$$

est linéaire.

b. Déterminer une base du noyau de tr et vérifier que $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathcal{B}$.

b. Vérifier que $(A - \mathrm{I}_4)^2 = 0$ où I_4 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

c. En déduire les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

d. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4. On revient au cas général où J désigne une matrice quelconque non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Montrer que 1 est une valeur propre de f et préciser la dimension du sous-espace propre associé.

b. Justifier que J est un vecteur propre de f et préciser la valeur propre associée.

c. (i) On considère dans cette question le cas où $\mathrm{tr}(J) \neq 0$. Montrer que f est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de chacun des sous-espaces propres.

(ii) On considère dans cette question le cas où $\mathrm{tr}(J) = 0$. On suppose qu'il existe une valeur propre λ de f différente de 1 et on note M un vecteur propre associé. Montrer que $\mathrm{tr}(M) = 0$. Aboutir à une contradiction.

(iii) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(J)$ pour que f soit diagonalisable.

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(J)$ pour que f soit bijectif.